Метод последовательных нагружений при организации моделирования процесса возведения для физически нелинейных задач

Система нелинейных уравнений, описывающих нелинейную задачу, выглядит следующим образом:

$$Au = f \tag{1}$$

где: A – нелинейный оператор задачи;
u – вектор искомых перемещений;
f – вектор внешних нагрузок.

Идея шагового метода заключается в замене нелинейных уравнений (1) рекуррентной последовательностью линейных, которые на m шаге имеют вид

$$A_m \Delta u_{m+1} = \Delta\beta_{m+1} f; \quad u_{m+1} = u_m + \Delta u_{m+1} \tag{2}$$

где: A_m – линейный оператор, в развернутом виде имеющий вид:

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}\right|_{u_m} & \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial u_j}\right|_{u_m} & \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial u_n}\right|_{u_m} \\ \left.\frac{\partial\psi_l}{\partial u_1}\right|_{u_m} & \left.\frac{\partial\psi_l}{\partial u_j}\right|_{u_m} & \left.\frac{\partial\psi_l}{\partial u_n}\right|_{u_m} \\ \left.\frac{\partial\psi_n}{\partial u_1}\right|_{u_m} & \left.\frac{\partial\psi_n}{\partial u_j}\right|_{u_m} & \left.\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n}\right|_{u_m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Здесь $\psi_l(l = 1,2..n)$ – нелинейные операторы, т.е. l уравнение системы $Au = f$ выглядит как $\psi_l(u_1,u_2,..u_j,..u_n) = P_l$; t – параметр нагрузки.

Суть модификации метода заключается в том, что параметр t вводится к нагрузке P. При t = 0 легко определяется начальное решение u_0, при t=1 система превращается в исходную. Последовательно изменяя t от 0 до 1, находится приближенное решение.

Вычислительная схема на каждом шаге получается из следующих соображений: введем гипотезу, что на m-этапе $t = t_m$ известно решение, т.е.

$$A\, u_m = t_m f. \tag{4}$$

Изменим t_m на величину Δt_{m+1} так, чтобы $t_{m+1} = t_m + \Delta t_{m+1}$ была ближе к единице, чем t_m. Тогда:

$$A(u_m + \Delta u_{m+1}) = (t_m + \Delta t_{m+1}) f \quad . \tag{5}$$

Разложим левую часть (4) в ряд Тейлора, тогда:

$$Au_m + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} = \left(\frac{\partial^i}{\partial u^i} A\Big|_{u_m} + \Delta u^i_{m+1} \right) + R_k = t_m f + \Delta t_{m+1} f \tag{6}$$

Пренебрегая квадратами и высшими степенями Δu_{m+1} (величина Δt должна допускать эту процедуру) и с учетом (4) получим линеаризованную систему для нахождения Δu_{m+1}, т.е.

$$A_m \Delta u_{m+1} = \Delta t_{m+1} f, \quad u_{m+1} = u_m + \Delta u_{m+1}, \tag{7}$$

где A_m – линейный оператор $\left(A_m = \frac{d}{du} A\Big|_{u_m} \right)$.

Напряжения определяются по формуле, аналогичной (7):

$$\{\sigma\}^{m+1} = \{\sigma\}^m + \{\Delta\sigma\}^m \tag{8}$$

Для малых этапов нагружения используется значение касательного модуля деформации, вычисляется по напряженно-деформированному состоянию конструкции предшествующей ступени загружения. Для изотропных материалов для определения касательного модуля деформаций используется следующий подход. При коэффициенте Пуассона, отличном от 0.5, псевдоупругие параметры вычисляются по формулам:

$$E^*_{k(m)} = E_k^{m-1} / \Omega_k \tag{9}$$

$$\nu^*_{k(m)} = \left[\frac{1+\nu}{3} - \frac{(1-2\nu)E_k^{m-1}}{3E_0} \right] / \Omega_k \tag{10}$$

где E_0, ν – начальный модуль упругости и коэффициент Пуассона;
E_k – касательный модуль обобщенной кривой деформирования;

$$\Omega_k = \left[\frac{2(1+\nu)}{3} + \frac{1-2\nu}{3E_0} E_k^{m-1} \right] \tag{11}$$

Если на m-м этапе происходит разгрузка, то для расчета принимается начальный модуль упругости E_0.

Предлагается более общий подход, основанный на зависимости $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_i)$, где σ_i – эквивалентные напряжения, ε_i – эквивалентные деформации. В этом случае касательный модуль деформации определяется, как $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon\_i}$.

В физическом смысле этот процесс можно трактовать как постепенное увеличение нагрузки, начинающееся от 0 и заканчивающееся заданным f.

Для одномерного случая возможна геометрическая интерпретация метода (рис. 2)

На m+1 итерации уравнение метода конечных элементов имеет вид:

$$K_m \Delta u_{m+1} = t_{m+1} f \,, \tag{12}$$

где K_m – матрица канонических уравнений на m-ом этапе расчета.

$$\sum_{z\in 1_1} K^{(m)}_{1_{1,r}} \Delta u_{1,m+1} + \ldots + \sum_{z\in 1_j} K^{(m)}_{1_j} \Delta u_{j,m+1} + \ldots + \sum_{z\in 1_n} K^{(m)}_{1_{n,r}} \Delta u_{n,m+1} = \Delta t_{m+1} P1 \tag{13}$$

Перемещения (u_m) и усилия (s_m) для конструкции возведенной ранее (для этапов 1, 2, … m-1) определяются по формулам $u_m = u_{m-1} + \Delta u_m, \quad S_m = S_{m-1} + \Delta S_m$.

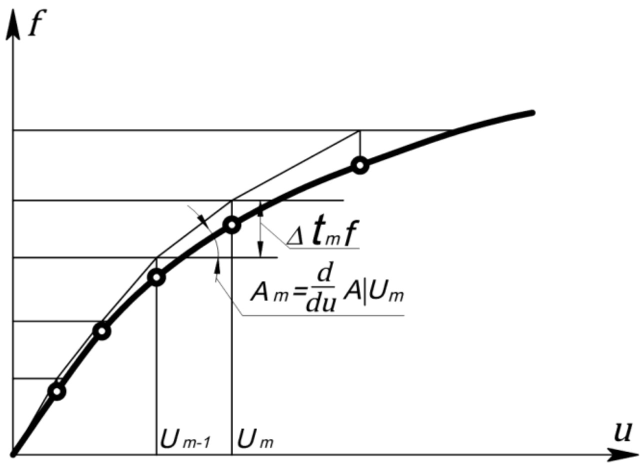

Рис.1. Геометрическая интерпретация метода последовательных нагружений

Линеаризованный оператор A_m соответствует касательным жесткостным характеристикам, т.е. $A_m = \frac{d}{du} A \Big|_{u_m}$.

В отличие от (12) в (13) K_m не только составляются с учетом физически нелинейных свойств материала, но и с учетом изменения топологии конструкции, так как на m этапе расчета (m стадии возведения) учитывается появление новых элементов. При учете физической и геометрической нелинейности решение системы (13) требует дополнительных шагов типа (12).